

Esame di Metodi Numerici

18-12-2009

- 1) Il filosofo e matematico pitagorico Teone di Smirne (70-135 d.C. circa), riporta che gli abitanti di Delo, chiedendo all'oracolo di Apollo come liberarsi dalla peste, ricevettero l'ordine di costruire un altare di forma cubica, del volume doppio rispetto a quello esistente. Da qui nacque il problema della "duplicazione del cubo" ovvero, dato un cubo di lato L , trovare il lato del cubo che abbia volume doppio del precedente (problema irrisolvibile con riga e compasso). Il problema geometrico corrisponde al problema analitico di trovare lo zero della funzione:

$$f(x) = x^3 - 2.$$

Utilizzando il metodo di Newton, risolvere il problema **dimostrando** che lo zero della $f(x)$ può essere ricavato dal limite della successione:

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 2}{3x_k^2}.$$

Ricavare quindi lo zero, compreso certamente nell'intervallo $[0, 2]$, iterando la successione data a partire dal punto medio dell'intervallo. Confrontando i valori ricavati man mano con il valore esatto, quante iterazioni sono necessarie per ottenere lo zero con almeno 4 cifre significative corrette? Quante iterazioni sarebbero state (all'incirca) necessarie se avessimo usato il metodo di bisezione? (10 pt.)

- 2) Durante una esercitazione di laboratorio, uno studente deve misurare la dipendenza del periodo di oscillazione di un pendolo semplice, in funzione della lunghezza del filo. Essendo pigro, decide di prendere soltanto tre misure molto accurate del periodo T , in funzione di L , tabulate qui sotto:

L (m)	0.1	0.5	1.0
T (s)	0.63	1.42	2.0

e utilizzare il metodo dei polinomi di Lagrange per calcolare altri 4 valori intermedi, corrispondenti ad $L = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ metri rispettivamente. Quali valori troverà? (10 pt.)

3) La distribuzione di una serie di eventi casuali con media μ e deviazione standard σ è descritta, com'è noto, dalla distribuzione di Gauss:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Supposto che la media degli eventi sia nulla ($\mu = 0$) e la deviazione standard pari ad 1 ($\sigma = 1$) verificare, utilizzando il metodo di Romberg applicato alla regola dei trapezi con due soli intervalli iniziali, che la probabilità di trovare un evento con $|x| \leq \sigma$ è circa del 68.2%, cioè che l'integrale:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}$$

vale approssimativamente 0.682... Come mai il valore trovato viene corretto alla terza cifra significativa nonostante la larghezza h dell'intervallo iniziale sia grande ($h = 0.5$)? Spiegare qualitativamente. (10 pt.)