

Esame di Metodi numerici

(06-02-2012)

- L'equazione: $\log(x) = 1$ ha per soluzione $x = e$, il numero di Neper. Una stima del valore di e può quindi essere data calcolando gli zeri della funzione: $f(x) = \log(x) - 1$ nell'intervallo: $x \in [2.0, 3.0]$. Calcolare e con almeno 3 cifre decimali esatte con il metodo della falsa posizione. Confrontare il numero di iterazioni necessarie per ottenere l'analogo risultato con il metodo di bisezione, con la stessa precisione. (10 punti)
- Una serie di misure di laboratorio di una certa grandezza fisica $f(x)$, è tabulata come segue per 5 valori della variabile x :

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$f(x)$	0.0	0.24	0.43	0.5	0.0

Calcolare un valore interpolato per la grandezza $f(x)$ per $x = 0.6$, interpolando la funzione data con una spline cubica "naturale" (derivata seconda della spline nulla in 0.0 e 1.0) nei 4 intervalli dati. Ricordo che:

$$S_{3,j}(x) = M_{j-1} \frac{(x - x_{j-1})^2}{2} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} \frac{(x - x_{j-1})^3}{6} + C_j(x - x_{j-1}) + \tilde{C}_j$$

è la spline del terzo ordine nell'intervallo j -esimo, e le C_j e \tilde{C}_j sono definite come:

$$\tilde{C}_j = y_{j-1}, \quad C_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j h_j}{6} - \frac{M_{j-1} h_j}{3}$$

dove gli M_j sono le derivate seconde della spline nel j -esimo intervallo e h_j la spaziatura dell'intervallo stesso. (10 punti)

- Il valore dell'area di un'ellisse di semiasse maggiore a e semiasse minore b , può calcolarsi secondo la formula:

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

e vale: $A = \pi ab$. Un valore approssimato della costante π si può quindi calcolare come:

$$\pi = \frac{4}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Posto $a = 1$, calcolare un valore approssimato di π valutando l'integrale nella formula precedente su quattro intervalli equipazati in $[0, a]$, utilizzando la regola dei trapezi. Utilizzando come valore esatto di π il valore: $\pi = 3.1415926$, quale numero N di intervalli si sarebbe dovuto utilizzare per ottenere una stima di π con un errore inferiore a 10^{-3} ? (10 punti)