

Esame di metodi numerici
Appello del 03-02-2015

Un oscillatore di Van der Pol forzato è un sistema in cui una quantità oscillante x è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x - A \sin(\omega t) = 0$$

con a , A e ω costanti reali.

L'equazione di Van der Pol (con $A = 0$) fu inizialmente introdotta dal fisico e ingegnere elettronico olandese Balthasar Van der Pol che notò alcune anomalie non lineari nell'andamento della corrente in circuiti elettronici che impiegavano tubi a vuoto. Successivamente, tale equazione fu impiegata con successo in biologia, per modellizzare aritmie nei battiti cardiaci o nella trasmissione delle correnti neuronali ed in geologia, per modellizzare lo scorrimento di placche tettoniche.

Risolvere l'equazione data con un metodo numerico appropriato per valori di $a = 0, 1, \dots, 5$, $A = 0$ e condizioni iniziali: $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$, descrivendo come si modifica la soluzione dell'equazione. In particolare, studiare nel dettaglio come varia la frequenza delle oscillazioni all'aumentare di a . Cosa succede alla soluzione nel caso di valori di a negativi?

Successivamente, porre $A = 5$ e $a = 1$ e vedere come cambia la soluzione per almeno cinque diversi valori di ω equispaziati, compresi nell'intervallo $\omega \in [0, 10]$, con le stesse condizioni iniziali specificate sopra. Dare alcuni esempi di soluzione nello spazio delle fasi $\dot{x}(x)$ sia nel caso con $A = 0$ che nel caso $A \neq 0$.