Esame di metodi numerici

Appello del 16-07-2015

L'equazione per la parte angolare nella direzione θ dell'equazione di Poisson in geometria sferica è descritta dalla relazione (equazione di Legendre):

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n(x)}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{d\mathrm{P}_n(x)}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2}\mathrm{P}_n(x) = 0$$

che ha una infinità numerabile di soluzioni, per $n = 0, 1, 2, \ldots$, chiamate **polinomi di Legendre**.

Risolvere l'equazione data con un metodo numerico appropriato per valori di $n = 0, 1, 2, 3, 4$, nell'intervallo $x \in [0, +1]$, utilizzando le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(x=0) &= 1; & \mathrm{P}'_0(x=0) &= 0; & &\text{per } n=0 \\
\mathrm{P}_1(x=0) &= 0; & \mathrm{P}'_1(x=0) &= 1; & &\text{per } n=1 \\
\mathrm{P}_2(x=0) &= -1/2; & \mathrm{P}'_2(x=0) &= 0; & &\text{per } n=2 \\
\mathrm{P}_3(x=0) &= 0; & \mathrm{P}'_3(x=0) &= -3/2; & &\text{per } n=3 \\
\mathrm{P}_4(x=0) &= 3/8; & \mathrm{P}'_4(x=0) &= 0; & &\text{per } n=4
\end{aligned}$$

Confrontare il risultato con le soluzioni teoriche:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_0(x) =& 1 \\
\mathrm{P}_1(x) =& x \\
\mathrm{P}_2(x) =& \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
\mathrm{P}_3(x) =& \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \\
\mathrm{P}_4(x) =& \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)
\end{aligned}$$