Esame di metodi numerici

Appello straordinario del 29-01-2016

La distribuzione Chi-quadro descrive le proprietà statistiche della somma dei quadrati di un insieme di k variabili aleatorie indipendenti aventi distribuzione normale standard. La sua espressione matematica è data da:

$$\chi^2(k,x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \mathrm{e}^{-x/2}$$

con $x \in [0,+\infty]$, e $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. La funzione $\Gamma(k/2)$ è la funzione Gamma di Eulero, che vale, per valori dispari di k:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(k-2)!!}{2^{(k-1)/2}}.$$

Calcolare, per i valori di $k = 3, 5, 7, 9, 11$, il valore atteso, la varianza, la skewness e la flatness della distribuzione, valutando i relativi integrali in maniera approssimata utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson. Confrontare i risultati con i valori teorici attesi:

$$E(k) = \int_0^{+\infty} x\chi^2(k,x)dx = k$$

$$\sigma(k) = \int_0^{+\infty} [x - E(k)]^2\chi^2(k,x)dx = 2k$$

$$s(k) = \frac{1}{\sigma^{3/2}(k)} \int_0^{+\infty} [x - E(k)]^3\chi^2(k,x)dx = \sqrt{\frac{8}{k}}$$

$$f(k) = \frac{1}{\sigma^{4/2}(k)} \int_0^{+\infty} [x - E(k)]^4\chi^2(k,x)dx = 3 + \frac{12}{k}$$

Suggerimento. Per calcolare l'integrale esteso ad un intervallo infinito, si noti che la funzione $\chi^2(k,x)$ decresce velocemente al crescere di x. Di conseguenza, basta limitare gli estremi di integrazione a quei valori di x positivi per cui la funzione diventa inferiore (per il valore di k dato) alla precisione di macchina.