Esame fisica computazionale

Appello del 21-06-2016

Il modello di Lorenz descrive un modello semplificato di convezione, sotto forma di un sistema di equazioni differenziali alle derivate totali:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x)\\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - xz - y\\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

dove x, y, z sono legate alla velocità dei moti convettivi, alla differenza di temperatura tra le masse ascendenti e discendenti e alle fluttuazioni rispetto al profilo di temperatura all'equilibrio, rispettivamente. I parametri σ, ρ e β sono invece legati alle quantità medie del sistema.

Lorenz si accorse (in maniera del tutto casuale!) che il sistema di equazioni presenta una forte sensibilità alle condizioni iniziali, cioé soluzioni del sistema ottenute per condizioni iniziali vicine tra loro possono avere un comportamento del tutto differente, ovvero il sistema è *caotico*.

Risolvere numericamente il sistema di Lorenz con un metodo di Runge-Kutta al secondo ordine, per i seguenti valori dei parametri:

$$\begin{aligned}\sigma &= 10\\ \rho &= 28\\ \beta &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

e con condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 11$ e $z(0) = 20$ e $x(0) = 0.999$, $y(0) = 11$ e $z(0) = 20$, integrando nell'intervallo $t = [0, 20]$, e utilizzando un passo temporale $h = 10^{-5}$. Evidenziare come, per $t \gtrsim 8$ le soluzioni si discostano l'una dall'altra, assumendo un comportamento caotico. Studiare infine la forma delle traiettorie nello spazio delle fasi $x(t)$-$y(t)$, $x(t)$-$z(t)$ e $y(t)$-$z(t)$.