Esame di Fisica Computazionale

Appello del 03-07-2017

L'equazione differenziale che descrive il moto di una carica positiva soggetta all'azione di un campo elettrico e magnetico uniformi e statici, è:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

dove $\mathbf{r}(t)$ rappresenta il vettore posizione della carica in funzione del tempo e $\mathbf{v}(t)$ la sua velocità. Si supponga che, normalizzando l'equazione, valga $m = c = q = 1$. Si risolva l'equazione data con uno schema di Runge-Kutta del II ordine, scegliendo come passo temporale $h = 10^{-4}$ e come tempo massimo $T_{max} = 50$.

Si analizzino in dettaglio i seguenti casi:

1. $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, con $E_0 = 2$ e $B_0 = 3$. Si compari la soluzione numerica con la soluzione teorica:

$$x(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\left[\sin\left(\Omega t + \varphi\right) - \sin\left(\varphi\right)\right] + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\left[\cos\left(\Omega t + \varphi\right) - \cos\left(\varphi\right)\right] + y_0$$

$$z(t) = \frac{E_0}{2}t^2 + v_{z,0}t + z_0$$

   dove $v_\perp = \sqrt{v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2}$, $\Omega = qB_0/mc$ è la frequenza di ciclotrone della carica e $\varphi = \tan^{-1}\left(-v_{y,0}/v_{x,0}\right)$. Si scelgano come condizioni iniziali $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ e $z_0 = 3$, $v_{x,0} = v_{y,0} = 1$ e $v_{z,0} = 2$. Si mostri inoltre come l'orbita nel piano x-y sia una circonferenza.

2. $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, con $E_0 = 1$ e $B_0 = 1$. Si compari la soluzione numerica con la soluzione teorica:

$$x(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\left[\sin\left(\Omega t + \varphi\right) - \sin\left(\varphi\right)\right] + x_0$$

$$y(t) = \frac{v_\perp}{\Omega}\left[\cos(\Omega t + \varphi) - \cos(\varphi)\right] + y_0 - \frac{cE_0}{B_0}t$$

$$z(t) = v_{z,0}t + z_0$$

Si scelgano come condizioni iniziali $x_0 = y_0 = 1$ e $z_0 = 0$, $v_{x,0} = 1$, $v_{y,0} = v_{z,0} = 0$. Si mostri inoltre come l'orbita x-y sia una orbita aperta, detta epicicloide. NB. In questo caso, non vale $v_\perp = \sqrt{v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2}$ ma $v_\perp = \sqrt{v_{x,0}^2 + (v_{y,0} + E_0/B_0)^2}$. Discorso simile vale per l'angolo φ.

3. **Esercizio bonus**

   Nel caso in cui il campo magnetico sia leggermente disomogeneo e presenti gradienti perpendicolari alla sua direzione, si può mostrare che le particelle sono soggette ad un drift molto simile a quello osservato nel punto precedente. Si studi il caso $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = B_0(1 + \alpha x)\mathbf{z}$, con parametri $B_0 = 1$, $\alpha = 0.001$ e condizioni iniziali $x_0 = y_0 = 1$ e $z_0 = 0$, $v_{x,0} = v_{y,0} = 1$ e $v_{z,0} = 0$. Si mostri come il gradiente di campo magnetico produce un drift lungo y con velocità di drift:

$$\mathbf{v}_d = -\frac{v_\perp^2}{2\Omega}\frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} \simeq \frac{v_\perp^2}{2\Omega}\alpha$$

   Nota bene: La formula precedente vale soltanto nel caso lineare $\alpha \ll 1$.