Esame di Fisica Computazionale

Appello del 21-07-2017

La serie di Fourier di una funzione periodica $f(x)$ di periodo 2π è definita come:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \qquad x \in [0, 2\pi]$$

dove i coefficienti: a_n e b_n sono detti **coefficienti di Fourier** dello sviluppo e sono definiti da:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

per $n = 0, \ldots, \infty$.

Si definisce **spettro** di Fourier della funzione $f(x)$, la funzione:

$$E(n) = \begin{cases} \frac{a_0^2}{2} & \text{per } n = 0 \\ a_n^2 + b_n^2 & \text{per } n \neq 0 \end{cases}$$

per $n = 0, \ldots, \infty$, con n intero.

Considerata la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{per } x = \pi \\ x - 2\pi & \text{per } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

calcolare, utilizzando il metodo dei trapezi su $N = 128$ intervalli equispaziati (129 punti) i coefficienti di Fourier a_n e b_n della funzione data e il suo spettro $E(n)$ per $n = 0, \ldots, 64$.

Verificare che i coefficienti a_n risultano sempre nulli per la funzione data, e che lo spettro $E(n) \propto n^{-2}$. Suggerimento: plottare $E(n)$ in funzione di n in scala log-log (il grafico dovrebbe essere una retta) e verificare che il grafico ha la stessa pendenza di x^{-2}, plottando insieme le due curve.

Infine, verificare l'**identità di Parceval**:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx = \frac{1}{2}E(0) + \sum_{n=1}^{N/2}E(n)$$

calcolando numericamente l'integrale con la stessa tecnica usata in precedenza.