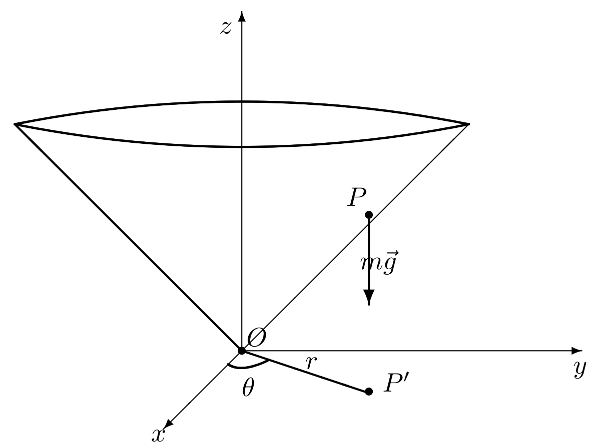
Esame di fisica computazionale
Appello del 20-09-2018

Un punto materiale di massa m si muove, sotto l'azione del suo peso e della reazione vincolare, rimanendo aderente alla superficie di un cono rovesciato come in figura:



Le equazioni in coordinate cilindriche che governano il moto del punto materiale sono:

$$
\begin{aligned}
r &= z \tan\alpha \\
\dot{\theta} &= \frac{z_0 v_0}{z^2 \tan\alpha} \\
\ddot{z} &= \cos^2\alpha \left(\frac{z_0^2 v_0^2}{z^3} - g \right)
\end{aligned}
$$

dove r è la posizione radiale del punto P, θ l'angolo formato dalla proiezione della posizione del punto materiale sulla superficie del cono e l'asse x, z_0 l'altezza iniziale del punto materiale, v_0 la sua velocità iniziale nella direzione azimuthale θ, z l'altezza del punto rispetto all'asse del cono, α l'angolo di semiapertura del cono, $g = 9.81$ (in unità MKSA) è l'accelerazione di gravità.

Si risolvano le equazioni del moto date utilizzando uno schema di Runge-Kutta al secondo ordine e le condizioni iniziali: $\theta(t=0)=0$, $z(t=0)=z_0$, $\dot{z}(t=0)=0$.

Si mostri che:

1. tranne che nel caso in cui $v_0=0$, il punto materiale **non raggiunge mai il vertice del cono**, ma compie delle oscillazioni tra una altezza minima e massima, restando aderente alla superficie del cono per qualunque valore di $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 90°$;

2. nel caso $\alpha = 45°$, si verifichi che la posizione del massimo è compresa tra le altezze:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z_0; \\
z_2 &= \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8v_0^2 z_0 g}}{4g}
\end{aligned}
$$

   dove:

   (a) $z_1 \leq z \leq z_2$ se $v_0^2 > z_0 g$;

   (b) $z_2 \leq z \leq z_1$ se $v_0^2 < z_0 g$;

   (c) il corpo segue una traiettoria circolare se $v_0^2 = z_0 g$.

Suggerimento: per vedere nel dettaglio la traiettoria del punto materiale sul cono conviene plottare la traiettoria del punto materiale nello spazio cartesiano $x-y-z$, invece che in coordinate polari, tenendo conto che si ha:

$$
\begin{aligned}
x &= z \tan\alpha \cos\theta; \\
y &= z \tan\alpha \sin\theta
\end{aligned}
$$

e z è in comune tra i due sistemi di coordinate.