Esame di Fisica computazionale
Appello straordinario del 23/11/2018

La distribuzione lognormale descrive la probabilità di una variabile aleatoria il cui logaritmo segue una distribuzione normale (o di Gauss). Un processo lognormale è la realizzazione statistica di un processo moltiplicativo tra più variabili aleatorie **positive**. L'espressione matematica della PDF lognormale è data da:

$$f(\mu, \sigma, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

con $x \in [0, +\infty]$, e $\mu > 0$ e $\sigma > 0$ parametri reali. Calcolare, utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson per la soluzione degli integrali, per almeno 3 valori distinti di $\mu \in [0, 3]$ e altrettanti valori di $\sigma \in [0.1, 0.9]$, i momenti di ordine 1, 2, 3, 4 (media, varianza, skewness e kurtosis, rispettivamente) della distribuzione, definiti come:

$$\begin{aligned}
M_n(\mu, \sigma) &= \int_0^\infty x f(\mu, \sigma, x) dx, \qquad \text{per } n = 1, \\
M_n(\mu, \sigma) &= \int_0^\infty (x - M_1)^2 f(\mu, \sigma, x) dx, \qquad \text{per } n = 2, \\
M_n(\mu, \sigma) &= \int_0^\infty \left(\frac{x - M_1}{\sqrt{M_2}}\right)^n f(\mu, \sigma, x) dx, \qquad \text{per } n > 2,
\end{aligned}$$

e confrontare il risultato ottenuto con la previsione teorica:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
M_2 &= [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2) \\
M_3 &= [\exp(\sigma^2) + 2] \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \\
M_4 &= \exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 3
\end{aligned}$$

Si noti che la discontinuità nell'integrale per $x = 0$ è eliminabile, poiché il limite della funzione integranda vale sempre 0! *Suggerimento.* Per calcolare l'integrale

esteso ad un intervallo infinito, si noti che, una volta fissati i valori di μ e σ, la funzione $f(\mu, \sigma, x)$ decresce al crescere di x. Di conseguenza, basta limitare l'estremo superiore di integrazione a quei valori di x positivi per cui la funzione diventa inferiore (per i valori fissati di μ e σ) alla precisione di macchina.