Esame di fisica computazionale
Appello del 04-09-2019

L'equazione del moto di un pendolo semplice è:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \tag{1}$$

dove: $\omega = \sqrt{g/L}$, g è l'accelerazione di gravità e L la lunghezza del pendolo.

Fissate le condizioni iniziali: $\theta(t=0) = 0$ e $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ scelto a piacere, la soluzione dell'equazione (1) fornisce i valori dell'angolo θ formato dal pendolo con la verticale per tutti i tempi.

D'altronde, dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, si trova che, per ogni fissato valore di θ, il tempo impiegato a raggiungere tale angolo può essere calcolato dalla soluzione del seguente integrale ellittico:

$$t(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1-\cos\theta')}} \tag{2}$$

per $\dot{\theta}_0$ e θ fissati.

Si noti che esistono 2 classi di soluzioni differenti dell'equazione del pendolo, per due diversi intervalli di condizioni iniziali:

1. $\dot{\theta}_0 < 2\omega$, per cui il pendolo oscilla tra due posizioni:

   $$-\theta_{\text{max}} \le \theta \le +\theta_{\text{max}},$$

   con $\theta_{\text{max}} = \arccos(1 - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2})$;
2. $\dot{\theta}_0 > 2\omega$, per cui il pendolo ruota indefinitamente.

Lo studente calcoli, utilizzando uno schema simplettico, la soluzione dell'equazione (1) per almeno due valori differenti di $\dot{\theta}_0$, nei due casi 1) e 2) elencati sopra, calcolando numericamente $\theta(t)$ nei due casi.

Quindi lo studente calcoli, per almeno 10 valori differenti di θ per ogni fissato $\dot{\theta}_0$, la soluzione dell'integrale (2) utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson e cercando di mantenere la spaziatura dell'intervallo costante, in modo da eseguire il calcolo con la stessa precisione per tutti i valori di θ. Si esegua il calcolo per gli stessi valori di $\dot{\theta}_0$ utilizzati nei due casi precedenti, ottenendo la soluzione $t(\theta)$ per i 10 valori dell'angolo considerati. Si confrontino quindi i grafici ottenuti numericamente nei due casi, plottando le soluzioni per $\theta(t)$ e $t(\theta)$.