MECCANICA SUPERIORE
Prova Scritta del 12 luglio 2017

1. Un pendolo di massa m e lunghezza ℓ si trova, in presenza di gravitá, all'interno di una caravella, che oscilla a causa del moto ondoso. Di conseguenza, il punto di sospensione del pendolo si muove verticalmente secondo la legge

$$h(t) = h_0 \sin(\omega_0 t) \,, \tag{1}$$

con h_0 e ω_0 fissati. Scrivere la Lagrangiana, la Hamiltoniana, e le eq. di Hamilton del sistema.

2. Un gas perfetto costituito da N molecole di massa m è posto in un cilindro alto h e di raggio a che ruota intorno al suo asse con velocità angolare ω. Nel cilindro la temperatura T è tenuta costante. Ricordando che le molecole si trovano quindi in un campo esterno dovuto alla forza d'inerzia la cui energia potenziale è data da

$$U(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \tag{2}$$

dove r è la distanza di una generica molecola dall'asse di rotazione, determinare l'espressione della funzione di partizione, dell'energia interna del gas e della densità di probabilità di trovare una particella a distanza r dall'asse di rotazione.

3. Un fluido incomprimibile e viscoso è contenuto nell'intercapedine tra due cilindri coassiali di lunghezza infinita e raggi R_1 ed R_2 ($R_2 > R_1$). I cilindri ruotano attorno al loro asse con lo stesso senso di rotazione e con velocità angolari Ω_1 e Ω_2 ($\Omega_2 > \Omega_1$). Supponendo che non vi sia forza di gravità, si determini, in regime stazionario, il campo di velocità del fluido.

Relazioni utili in coordinate cilindriche

$$(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})_r = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \qquad (\nabla^2\vec{v})_r = \nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2}$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})_\phi = v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \qquad (\nabla^2\vec{v})_\phi = \nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2}$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v})_z = v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (\nabla^2\vec{v})_z = \nabla^2 v_z$$