MECCANICA SUPERIORE
Prova Scritta del 27 febbraio 2017

1. **Esercizio 1**

   Il pendolo doppio é costituito da una massa m_1 appesa a un punto fisso tramite un'asta di massa trascurabile e di lunghezza ℓ_1; alla prima massa é appesa una seconda massa m_2 tramite un'asta di massa trascurabile e di lunghezza ℓ_2. Tenendo conto della gravitá terrestre e supponendo che il moto di entrambi i pendoli avvenga in un piano verticale, scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del pendolo doppio.

2. **Esercizio 2**

   Consideriamo un gas costituito da N molecole in una scatola di volume V. Supponiamo che il potenziale di interazione tra due molecole sia dato da $\phi(|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|)$ ($r_{ij} = |\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|$ è la distanza tra la i-esima e la j-esima molecola). Mostrare che

   (a) la funzione di partizione $Z(\beta)$ si può scrivere

   $$Z(\beta) = Z_0(\beta)Q(\beta)$$

   con $Z_0(\beta)$ funzione di partizione di un gas ideale e

   $$Q(\beta) = \frac{1}{V^N}\int d^3r_1...d^3r_N \prod_{i<j}(1+f_{ij})$$

   con $f_{ij} = e^{-\beta\phi(r_{ij})} - 1$

   (b) per $|f_{ij}| \ll 1$ ed $N \gg 1$

   $$Q(\beta) \approx 1 + \frac{N^2}{2V}\int_0^\infty 4\pi r^2 f(r)dr$$

   con $f(r) = e^{-\beta\phi(r)} - 1$

   (c) l'equazione di stato del gas si può scrivere

   $$\frac{pV}{Nk_BT} = 1 - \frac{N}{2V}\int_0^\infty 4\pi r^2 f(r)dr$$

(d) assumendo che

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \infty & 0 < r < a \quad (1)\\
\phi(r) &= -\epsilon\frac{r-b}{a-b} & a < r < b \quad (2)\\
\phi(r) &= 0 & r > b \quad (3)
\end{aligned}$$

con $\epsilon > 0$, l'equazione di stato si può scrivere

$$\frac{pV}{Nk_BT} = 1 + \frac{N}{V}d_2(T)$$

e calcolare $d_2(T)$ in funzione di a, b ed ϵ.

3. Esercizio 3

Si supponga che un fluido incomprimibile, sottoposto alla forza di gravità e contenuto in un recipiente cilindrico aperto nella parte superiore, ruoti con velocità angolare costante $\vec{\Omega}$ attorno all'asse del contenitore cilindrico.

Si determini l'equazione della superficie del fluido e si specifichi il motivo per cui la soluzione è la stessa per i casi di fluido ideale e viscoso. (Si indichi con h l'altezza, rispetto al fondo del recipiente, del punto della superficie posto sull'asse di rotazione e con P_{est} la pressione dell'ambiente esterno.)

Si calcoli, infine, l'altezza massima raggiunta dalla superficie del fluido rispetto al fondo del recipiente, sapendo che il raggio del contenitore è R.