

MECCANICA SUPERIORE
Prova Scritta del 13 settembre 2017

1. Un corpo di massa M si muove in presenza di una forza centrale data da

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{u}_r \quad (1)$$

dove k è una costante, r la distanza dall'origine delle coordinate, e \hat{u}_r il versore diretto nella direzione radiale (uscente). Scrivere la Lagrangiana e le eq. di Lagrange del sistema, ed individuare gli integrali primi del moto. Indicare anche una tecnica per portare il sistema alle quadrature.

2. Un gas perfetto è costituito da N molecole biatomiche poste in un contenitore a temperatura T costante. L'energia potenziale di interazione tra gli atomi dell' i -esima molecola ha la forma

$$U(\mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_{i2}) = \frac{k}{2}|\mathbf{r}_{i1} - \mathbf{r}_{i2}|^2 \quad (2)$$

dove k è costante mentre \mathbf{r}_{i1} e \mathbf{r}_{i2} sono i vettori che individuano la posizione rispettivamente del primo e secondo atomo dell' i -esima molecola. Tutti gli atomi hanno eguale massa m .

Determinare l'espressione della funzione di partizione, dell'energia interna, della pressione del gas e del valor medio della distanza tra gli atomi di ogni molecola.

3. Un recipiente cilindrico di raggio R , aperto sul bordo superiore, ha un foro circolare di raggio $r \ll R$ in corrispondenza del fondo. Supponendo che il recipiente contenga acqua fino ad una altezza h rispetto al fondo, calcolare la velocità con cui l'acqua fuoriesce dal foro. Considerando come istante di tempo iniziale $t = 0$ quello in cui l'altezza dell'acqua è pari ad h , calcolare il tempo necessario per lo svuotamento del recipiente.