Linee di corrente e traiettorie lagrangiane

1. Calcolare le linee di corrente per il campo di velocità di rotazione rigida $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, con $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ (Ω costante) e $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

2. Dato il seguente campo di velocità stazionario

$$\mathbf{v}(x, y) = -kx\mathbf{e}_x + ky\mathbf{e}_y$$

(con k costante) definito per $x \geq 0$ e per $y \geq 0$, calcolare la derivata convettiva e determinare le linee di corrente.

3. Dato il seguente campo di velocità stazionario

$$\mathbf{v}(x, y) = (V_0 + bx)\mathbf{e}_x - by\mathbf{e}_y \ ,$$

con V_0 e b costanti positive, calcolare la derivata convettiva e determinare le linee di corrente.

4. Si consideri il seguente campo di velocità:

$$\mathbf{v} = v_0 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x + v_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_y \ .$$

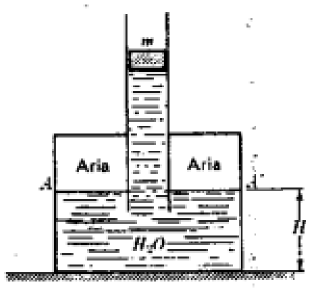
Determinare le linee di corrente e le traiettorie delle particelle fluide lagrangiane.

Fluidi in equilibrio statico

1. Nel contenitore mostrato in figura l'aria contenuta nella parte superiore ha pressione P e l'acqua nel tubo verticale di sezione S è separata dall'atmosfera esterna, avente pressione P_{est} da un pistone a tenuta, perfettamente scorrevole, di massa m. Si calcoli:

a) l'altezza della colonna d'acqua nel tubo rispetto al pelo libero AA' dell'acqua nel recipiente;

b) la pressione P_F sul fondo del recipiente, supponendo che sia nota l'altezza H dell'acqua nel contenitore.



2. Due recipienti cilindrici comunicanti in prossimità delle basi contengono del mercurio; la sezione del primo recipiente è s_1, quella del secondo è $s_2 = 2s_1$. Si versa dell'acqua nel primo recipiente finché il livello del mercurio non si abbassa di h. Calcolare la massa m di acqua versata. (Si indichi la densità dell'acqua con ρ_A e quella del mercurio con ρ_M).

3. Due recipienti cilindrici comunicanti tra loro, disposti verticalmente e contenenti acqua, hanno sezioni $S_A = S$ e $S_B = 3S$, rispettivamente. I due recipienti sono chiusi superiormente da due pistoni a tenuta, perfettamente scorrevoli, di massa $m_A = m$ ed $m_B = 4m$. Si calcoli:

   a) il dislivello d tra le colonne d'acqua nei due recipienti;

   b) la massa M_c del carico che si deve porre sul pistone A per ottenere livelli uguali nei due recipienti.

4. Una parete larga $l = 5$ m e alta $h = 3$ m separa una massa d'acqua dall'ambiente. Calcolare a quale forza è sottoposta la parete. Si indichi con P_0 la pressione dell'ambiente.

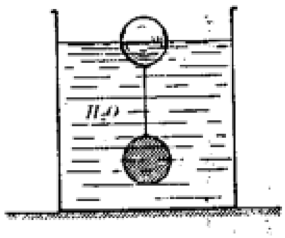
5. Un carro si muove con accelerazione costante di modulo $a_T = 0.5$ m/s^2 su un piano orizzontale; sul carro si trova un recipiente contenente del liquido. Se l'acqua è in equilibrio per un osservatore solidale al carro, quanto vale l'angolo formato con l'orizzontale dal pelo libero dell'acqua?

6. Una sfera, di massa $m = 0.8$ kg e raggio $R = 4$ cm, è appesa ad una molla di costante elastica $k = 125$ N/m. Se la sfera viene immersa in un liquido si osserva che la posizione di equilibrio statico cambia di 2 cm. Calcolare la densità del liquido.

7. Una sfera cava di raggio $r = 10$ cm e massa $m = 0.5$ kg, immersa parzialmente nell'acqua, sostiene con un filo un corpo sferico di raggio $r_1 = 5$ cm e massa $m_1 = 3$ kg. Si calcoli:

   a) la tensione τ del filo;

   b) il volume V della parte di sfera che emerge sull'acqua.



8. Un cubo di acciaio ($\rho = 7.8 \times 10^3$ kg/m^3, lato $l = 5$ cm) galleggia sul mercurio ($\rho' = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3). Calcolare quanto è alta la parte emersa del cubo.